**Zestaw-6**

1. Rozwiąż następującą zależność rekurencyjną stosując metodę podstawiania:

an = 4an-1 + 3 dla n > 0 i a0 = 3

an =4an-1+3 a0=3 a1=15

an= 4an-1+3 = 42an-2+41\*3+40\*3=

an=4(4(4an-3+3)+3)+3=43an-3+42\*3+41\*3+40\*3=

an=4na0+4n-1\*3....+41\*3+40\*3=

an=3(4n+4n-1...+40)=4n-1

2. Na jaką cyfrę kończą się liczby **280**, **320** , **1115** , **730** ?

a ≡ b (mod 10) /\* x → {(a \* x) ≡ (b \* x) (mod 10)

**210 ≡ 1024 ≡ 4 (mod 10) 1024 ≡ 4 (mod 10)**

210 ≡ 4 (mod 10) / 2

220 ≡ 16 (mod 10) ≡ 6 (mod 10)

220 ≡ 6 (mod 10) / 2

240 ≡ 36 (mod 10) ≡ 6 (mod 10)

240 ≡ 6 (mod 10)

280 ≡ 36 (mod 10) ≡ 6 (mod 10)

**Odp: liczba 280 konczy się cyfrą 6**

**35 ≡ 243 ≡ 3(mod 10)**

35 ≡ 3(mod 10) / 2

310 ≡ 9(mod 10) / 2

320 ≡ 81(mod 10) ≡ 1(mod 10)

**Odp: 320 konczy się cyfrą 1**

**111 ≡ 11 ≡ 1(mod 10)**

111 ≡ 1(mod 10) / 15

1115 ≡ 1(mod 10)

**Odp: 1115 konczy się cyfrą 1**

**72 ≡ 49 ≡ 9(mod 10)**

72 ≡ 9(mod 10) / 2

74 ≡ 81(mod 10) ≡ 1(mod 10) /2

78 ≡ 12(mod 10) ≡ 1(mod 10) /72 // jako że wiemy iż 72 ≡ 9(mod 10)

710 ≡ 1\*9 (mod 10) /2

720 ≡ 81 (mod 10) ≡ 1 (mod 10) /\*710

730 ≡ 1\*9 (mod 10)

**Odp: 730 konczy się cyfrą 9**

Na jaką cyfrę kończy się liczba **724**?

72 = 49 = 9 (mod 10

72 = 9 (mod 10) / 3

76= 729 (mod 10) = 9 (mod 10)

76= 9 (mod 10) / 2

712= 81 (mod 10) = 1 (mod 10)

712= 1 (mod 10) / 2

724= 1 (mod 10)

**Liczba ta kończy się na 1.**

n n2 - n

3. Czy zależność ta jest prawdziwa: =

2 2

L = = = = = = P

Zależność jest prawdziwa

4. Ile różnych 9 cyfrowych numerów możesz wybrać w swojej „komórce”?

Komórka ma 10 różnych cyfr [od 0 do 9]. Jeśli cyfry mogą się powtarzać i numer może się zacząć od zera, to mamy:

10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 109 numerów, ponieważ w każde z dziewięciu "miejsc" w numerze możemy dowolnie wybrać jedną z 10 cyfr.

5. Któremu wierszowi trójkąta Pascala odpowiadają współczynniki wielomianu Newtona (a + b)4.

Czwartemu, bo:

Można to łatwo sprawdzić rysując trójkąt Pascala i sprawdzając któremu wierszowi odpowiada (a + b)2 lub dla pewności jeszcze (a + b)3

0 1

1 1 1

2 1 2 1

3 1 3 3 1

4 1 4 6 4 1

(a + b)2 = a2 + 2ab + b2 [współczynniki to 1 2 1 - wiersz drugi w trójkącie]

(a + b)3 = a3 + 3a2b + 3ab2 + b3 [współczynniki to 1 3 3 1 - trzeci wiersz]

Widać więc prostą zależność, że liczba określająca potęgę określa jednocześnie wiersz w trójkącie Pascala.

albo zauważając, że:

20= (a+b)0=1  
21= (a+b)1=a+b  
22= (a+b)2=a2+2ab+b223= (a+b)3=a3+3a2b+3ab2+b324= (a+b)4=a4+4a3b+6 a2 b2+4ab3+b4

…………………………………………………………

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (a+b)0 |  |  |  | 1 | |  |  |  |
| (a+b)1 |  |  |  | 1 | 1 |  |  |  |
| (a+b)2 |  |  | 1 | 2 | | 1 |  |  |
| (a+b)3 |  | 1 | 3 | | 3 | | 1 |  |
| (a+b)4 | 1 | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

Wielomianu Newtona (a + b)4  odpowiada wierszowi 5

**6.** Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby **10100 000**.

101≡ 3 (mod 7) / 2

102≡ 9 (mod 7) ≡ 2 (mod 7) / 2

104≡ 4 (mod 7) / 2

108≡ 16 (mod 7) ≡ 2 (mod 7) / \* 102

1010≡ 2\*2 (mod 7) ≡ 4 (mod 7) / \* 1010

1020≡ 4\*4 (mod 7) ≡ 2 (mod 7) / \* 1020

1040≡ 2\*2 (mod 7) ≡ 4 (mod 7) / \* 1040

1080≡ 4\*4 (mod 7) ≡ 2 (mod 7) / \* 1020

10100≡ 2\*2 (mod 7) ≡ 4 (mod 7) / \* 10100

1010000≡ 4\*4 (mod 7) ≡ 2 (mod 7) / \* 1010

10100000≡ 2\*4 (mod 7) ≡ 1 (mod 7)

Zatem ponieważ: 10100000 – 1 ≡ 0 (mod 7) bo 0 (mod 7) ≡ 7 (mod 7), itd.

**Odp. Liczba ta to: 10100000 -1**

7. Ile różnych 8-o znakowych tablic rejestracyjnych można skomponować mając do dyspozycji 5 rożnych symboli? Podaj założenie uzasadniające proponowany sposób rozwiązania.

Mamy 8 "miejsc" do zapełnienia i 5 znaków które możemy umieścić. W takim razie mamy: 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 58 [n miejsc do potęgi równej ilości możliwości]

/\ /\ /\ /\ /\ /\ /\ /\

| | | | | | | |

1 mje drugie trzecie czwarte piąte szóste siódme ósme

8. Podaj postać dziesiętnej liczby 43 w systemach o podstawie t = 2, 8 i 16. W przypadku systemu o podstawie 16, przyjmij następujące oznaczenia dla jego „cyfr” większych od 9: 10 = A, 11 = B, 12 = C, 13 = D, 14 = E , 15 = F.

dwójkowy :

43(10) = 101011(2)  
  
  
1 2 4 8 16 32

43 = 32 + 8 + 2 + 1  
101011   
  
ósemkowy :

liczbę binarną 101 011 dzielimy liczbę binarną na części po 3 bity   
  
101(2) -> 5(8)  
011(2) -> 3(8)  
  
43(10) = 53(8)

Szesnastkowy  
liczbę binarną dzielimy na części po 4 bity brakujące uzupełnić 0:  
0010 1011  
0010(2) -> 2(16)  
1011(2) -> B(16) (B(16) = 11(10))

43(10) = 2B(16)

Lub też w ten sposób:

43:2 |1  
21:2 |1  
10:2 |0  
5:2 |1  
2:2 |0

1:2 |1

43(10) = 101011(2)

101011(2) = 101|011(2) = 5|3(8)

101011(2) = 0010|1011(2) = 2|B(16)

9. **an = 2 + 2n** jest **n**-tym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz sumę pięciu ostatnich wyrazów tego ciągu.

S= an + an-1 + an-2 + an-3 + an-4 =

= (2n+2)+(2(n-1)+2)+(2(n-2)+2)+(2(n-3)+2)+(2(n-4)+2)=

= (2n+2)+(2n-2+2)+(2n-4+2)+(2n-6+2)+(2n-8+2)=

= (2n+2)+(2n)+(2n-2)+(2n-4)+(2n-6)=

=5\*(2n)+(2+0-2-4-6)=10n+(-10)=10n-10

10. Podaj wzór zastępujący: 4n+3 + 4n+2 +…+4k+…+44 =

Wiedząc że zachodzi równość :

Gdzie c jest dowolną liczbą całkowitą z zakresu <1 , n >

Możemy wyliczyć 4c / 4c-1 = q=(4\*4c-1 )/ (4c-1 )=4

11. Wykaż, że:

**n +1 n n**

**= +**

**k k-1 k**

**n +1**

**= n = n =**

**k k-1 k**

12. Rozwiąż następującą zależność rekurencyjną stosując metodę podstawiania:  
 ***an* = 4*an-1* + 3 dla *n* > 0 i *a0* = 3**

***an* = 3*an-1* + 2 dla *n* > 0 *i a0* = 2**

1. Wyznacz największe x ≤ 345 podzielne przez 11.
2. Rozwiąż następującą zależność rekurencyjną stosując metodę podstawiania:

**an = an-1 + (-1)n+1n, n > 1 , a1 = 1**

**an = an-1an-2 ; n > 2 , a1 = a2 = 2**

1. Ile najmniej mnożeń należy wykonać, aby obliczyć wartość potęgi: **x6 , x22, x42**.

**x22 = (x11)2 = ((x10)x)2 = ((x5)2x)2 = (((x4)x) 2x)2 = (((x2)2x)2x)2­zatem 6 mnożeń!**

**n-1**

16. Wykaż, że **C2n = Σ i = (n2 – n)/2**

**i=1**

tak bo:

n!/((n-2)!2!) = **(n2 – n)/2 = 1 + 2 + 3 +…+(n-1)**